第 11 講　図形と方程式(1)

1　a を実数とする．関数 $y=|x-1|+|x-2|$ と関数 $y=x+a$ のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とおく．G_1 と G_2 が交点をもつとする．

(1)　G_1 のグラフをかけ．

(2)　G_1 と G_2 の囲む領域が三角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，三角形の面積 S_1 を a を用いて表せ．

(3)　G_1 と G_2 の囲む領域が四角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，四角形の面積 S_2 を a を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0，0)，A(0，1)，B(1，0)，C(t，0) を考える．また線分 AB 上の点 D を，$\angle \mathrm{ACO}=\angle \mathrm{BCD}$ となるように定める．t の値を変化させたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　曲線 $y=x^2-1$ 上を動く点Pと，直線 $y=x-3$ 上を動く点Qとの距離が最小となるときの点Qの座標と，そのときの距離を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　図形と方程式(1)

xy 平面上の2つの放物線 C_1：$y=-x^2+4x$，C_2：$y=x^2-2x$ を考える．

(1)　C_1，C_2 の原点とは異なる交点をA，C_2 の頂点をBとし，点P(x_1, y_1) から2点A，Bを通る直線 l に下ろした垂線の足をHとする．点Pが直線 l 上にないとき，Hの座標を x_1，y_1 を用いて表すと

$$\left(\frac{x_1+\boxed{\text{ア}}\,y_1+\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\boxed{\text{エ}}\,x_1+\boxed{\text{オ}}\,y_1-\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$ である．

(2)　点P(x_1, y_1) が C_1 上にあるとき，三角形ABPの面積 S を x_1 を用いて表すと，$S=\left|x_1{}^2-\boxed{\text{キ}}\,x_1-\boxed{\text{ク}}\right|$ である．また点Pが C_1 上を原点からAまで動くとき，S の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　図形と方程式(1)

1　a を実数とする．関数 $y=|x-1|+|x-2|$ と関数 $y=x+a$ のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とおく．G_1 と G_2 が交点をもつとする．

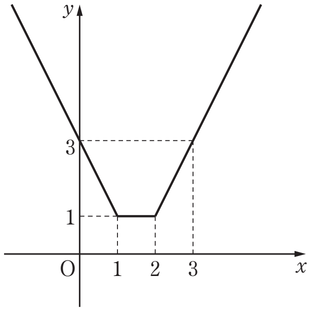
(1)　G_1 のグラフをかけ．

(2)　G_1 と G_2 の囲む領域が三角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，三角形の面積 S_1 を a を用いて表せ．

(3)　G_1 と G_2 の囲む領域が四角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，四角形の面積 S_2 を a を用いて表せ．

(1)　$y=|x-1|+|x-2|=\begin{cases} 2x-3 & (x\geqq 2) \\ 1 & (1\leqq x\leqq 2) \\ -2x+3 & (x\leqq 1) \end{cases}$

よって，G_1 のグラフは右図．



(2)　G_2 と直線 $y=1$ の交点を A とすると，A$(1-a,\ 1)$

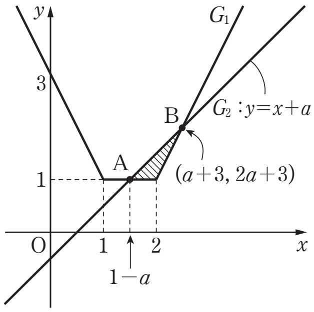
題意を満たすのはグラフより　$1\leqq$(A の x 座標)<2

つまり　$\boldsymbol{-1<a\leqq 0}$ のとき．

このとき　G_2 と直線 $y=2x-3$ との交点を B とすると

B$(a+3,\ 2a+3)$

よって　$S_1=\dfrac{1}{2}\{2-(1-a)\}\{(2a+3)-1\}=\boldsymbol{(a+1)^2}$



(3)　題意を満たすのはグラフより　(A の x 座標)<1

つまり　$\boldsymbol{a>0}$ のとき．

このとき G_2 と直線 $y=-2x+3$ の交点を C とすると

C$\left(\dfrac{3-a}{3},\ \dfrac{3+2a}{3}\right)$

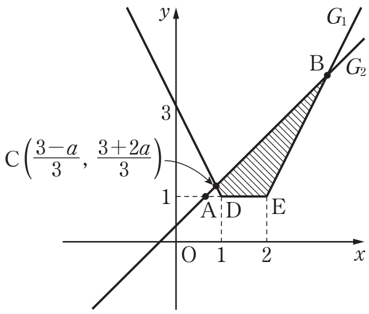
よって，D$(1,\ 1)$，E$(2,\ 1)$ とすると

$S_2=\triangle\text{AEB}-\triangle\text{ADC}$

$=(a+1)^2-\dfrac{1}{2}\{1-(1-a)\}\left(\dfrac{3+2a}{3}-1\right)$

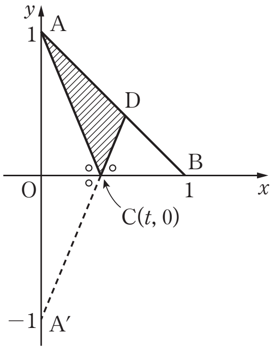
$=(a+1)^2-\dfrac{1}{3}a^2$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}a^2+2a+1}$



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の４点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C$(t, 0)$ を考える．また線分 AB 上の点 D を，$\angle$ACO$=\angle$BCD となるように定める．t の値を変化させたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．



A を x 軸に関して対称に移動した点を A′ とすると A′$(0, -1)$

直線 A′C の傾きは $\dfrac{1}{t}$ より，直線 A′C：$y=\dfrac{1}{t}x-1$

これと直線 AB：$y=-x+1$ との交点が D である．

よって　$\mathrm{D}\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACD}&=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{DBC}\\&=\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{1+t}\\&=\frac{1}{2}(1-t)\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{-t^2+t}{1+t}\\&=-t+2+\frac{-2}{t+1}=-\left(t-2+\frac{2}{t+1}\right)=-\left(t+1+\frac{2}{t+1}-3\right)\end{aligned}$$

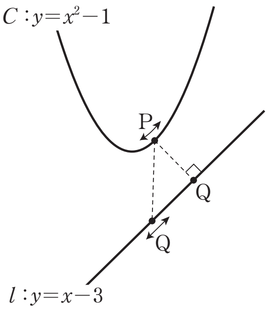
$0<t<1$　より　$t+1>0$　よって　(相加平均)≧(相乗平均) より

$$t+1+\frac{2}{t+1}-3\geqq2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}-3=2\sqrt{2}-3$$

等号成立は　$t+1=\dfrac{2}{t+1}$ より　$(t+1)^2=2$　$t+1=\pm\sqrt{2}$　よって　$t=-1+\sqrt{2}$ のとき．

よって　$\triangle\mathrm{ACD}\leqq-(2\sqrt{2}-3)=3-2\sqrt{2}$　より，求める面積の最大値は　$\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$

3　曲線 $y=x^2-1$ 上を動く点 P と，直線 $y=x-3$ 上を動く点 Q との距離が最小となるときの点 Q の座標と，そのときの距離を求めよ．



$C：y=x^2-1$　と　$l：y=x-3$　について

$x^2-1=x-3$ とすると　$x^2-x+2=0$

判別式　$D=1-8=-7<0$

よって，C と l は共有点をもたない．

C 上の点 P と l 上の点 Q の最短距離は点 P と直線 l との距離である．

P(t, t^2-1) とおくと，$l：x-y-3=0$ との距離 d は

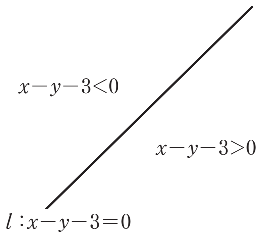
$$d=\frac{|t-(t^2-1)-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-t^2+t-2|$$

ここで P(t, t^2-1) は領域　$x-y-3<0$　内の点であることより

$t-(t^2-1)-3<0$　つまり　$-t^2+t-2<0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t+2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\right\}$



したがって　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　d は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{2}}{8}}$ をとる.

このとき　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ を通り，l と垂直な直線は

$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\quad つまり\quad y=-x-\frac{1}{4}$$

これと l との交点が求める Q の座標である．よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{8},\ -\dfrac{13}{8}\right)}$

【別解】　P と Q の距離が最短となるのは，P における C の接線が l と平行になるときである．

C について $y'=2x$ より　$2x=1$　　$x=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ を通り，l と垂直な直線は　$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{4}$

つまり　$y=-x-\dfrac{1}{4}$

これと l との交点が求める Q の座標である．よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{8},\ -\dfrac{13}{8}\right)}$

したがって　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{13}{8}+\dfrac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{2}}{8}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　図形と方程式(1)

xy 平面上の２つの放物線 C_1：$y=-x^2+4x$，C_2：$y=x^2-2x$ を考える．

(1)　C_1，C_2 の原点とは異なる交点を A，C_2 の頂点を B とし，点 P$(x_1,\ y_1)$ から２点 A，B を通る直線 l に下ろした垂線の足を H とする．点 P が直線 l 上にないとき，H の座標を x_1，y_1 を用いて表すと

$$\left(\frac{x_1+\boxed{ア}y_1+\boxed{イ}}{\boxed{ウ}},\ \frac{\boxed{エ}x_1+\boxed{オ}y_1-\boxed{カ}}{\boxed{ウ}}\right)$$ である．

(2)　点 P$(x_1,\ y_1)$ が C_1 上にあるとき，三角形 ABP の面積 S を x_1 を用いて表すと，$S=\left|x_1{}^2-\boxed{キ}x_1-\boxed{ク}\right|$ である．また点 P が C_1 上を原点から A まで動くとき，S の最大値は $\boxed{ケ}$ である．

(1)　C_1：$y=-x^2+4x$ と C_2：$y=x^2-2x$ より y を消去して整理すると

$x^2-3x=0$　　$x=0,\ 3$　　よって　A$(3,\ 3)$

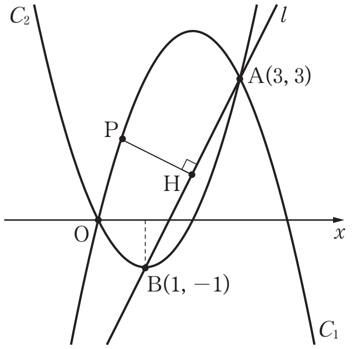
また　C_2：$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$　より　B$(1,\ -1)$

よって直線 l：$y=2(x-1)-1$　つまり　$y=2x-3$　……①

さらに，点 P$(x_1,\ y_1)$ を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}(x-x_1)+y_1\quad より$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{x_1}{2}+y_1\quad ……②$$



①，②より

$$x=\frac{x_1+2y_1+6}{5},\ y=\frac{2x_1+4y_1-3}{5}\qquad よって\quad \mathrm{H}\left(\boldsymbol{\frac{x_1+2y_1+6}{5}},\ \boldsymbol{\frac{2x_1+4y_1-3}{5}}\right)$$

(2)　点 P$(x_1,\ y_1)$ が C_1 上にあるとき　$y_1=-x_1{}^2+4x_1$

$$よって\quad \mathrm{HP}=\frac{|2x_1-y_1-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|2x_1-(-x_1{}^2+4x_1)-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_1{}^2-2x_1-3|}{\sqrt{5}}$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$　　したがって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{HP}=\boldsymbol{|x_1{}^2-2x_1-3|}$

さらに，点 P が C_1 上を原点から A まで動くとき，$x_1{}^2-2x_1-3<0$　より

$S=-x_1{}^2+2x_1+3=-(x_1-1)^2+4\ (0\leqq x_1\leqq 3)$

よって　S の最大値は　**4**

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。